



University of the Pacific Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1773

De motu vibratorio chordarum ex partibus quotcunque diversae crassitiei compositarum

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De motu vibratorio chordarum ex partibus quotcunque diversae crassitiei compositarum" (1773). *Euler Archive - All Works*. 441.

<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/441>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE MOTV
VIBRATORIO CHORDARVM
EX PARTIBVS QVOTCVNQVE DIVERSAE
CRASSITIEI COMPOSITARVM.

Auctore

L. E V L E R O.

Eadem methodo, qua casum ab Illustri *Bernoullio* tractatum expendimus, etiam motus chordarum, quae ex partibus quotcunque diuersae crassitiei sunt compositae, facile et expedite definiri potest, id quod casu, quo chorda ex tribus tantum diuersis partibus constat, ostendisse sufficiet.

- Tab. VI. 1. Sit igitur chorda AD in terminis A et D
 Fig. 2. fixa ex tribus partibus $AB=a$, $BC=b$; et $CD=c$
 composita, quarum diuersa crassities ita ad calculum referatur, vt ex genere, vnde portio AB est desumpta, chorda longitudinis $=k$ pondus habeat $=A$; chorda autem ex eo genere, vnde portio BC est desumpta et pariter longitudinis $=k$, pondus habeat $=B$, similique modo C sit pondus chordae itidem longitudinis k ex eo genere, vnde tertia portio CD est desumpta, tum vero sit pondus seu vis, qua ista chorda tenditur, K , hinc pro qualibet portione sequentes quantitates determinentur denotante h altitudinem

dinem lapsus vno minuto secundo facti, ita vt fit
 $b = 15\frac{5}{8}$ ped. Rhen. Statuatur pro prima portione

$$2 b k. \frac{K}{A} = \alpha \alpha ;$$

pro secunda portione

$$2 b k. \frac{K}{B} = \beta \beta$$

et pro tertia portione

$$2 b k. \frac{K}{C} = \gamma \gamma ,$$

quarum formularum rationem intelligere licet ex
 superiori differtatione, qua motum chordarum vni-
 formium generalissime determinauimus.

2. His positis vocemus pro prima portione
 $A B = a$, abscissam quamcunque $A X = x$ et appli-
 catam $A Y = y$, ita vt x non vltra a augeri pos-
 sit, pro secunda autem portione $B C = b$ vocetur
 abscissa quaecunque a puncto B desumpta $B X' = x'$
 et applicata $X' Y' = y'$, vbi abscissa $B X' = x'$ non
 vltra b augeri potest. Pro tertia autem portione
 $C D = c$, sit abscissa a puncto C sumpta $C X'' = x''$
 eique respondens applicata $X'' Y'' = y''$, vbi ergo po-
 sito $x' = c$ in ipsum terminum D peruenitur. Iam
 elapso tempore t , quod semper in minutis secundis
 exhibeatur, per principia supra stabilita, motus sin-
 gularum portionum sequentibus aequationibus diffe-
 rentio - differentialibus definietur :

$$I^{\circ}. \text{ pro portione } A B \left(\frac{d d y}{d t^2} \right) = \alpha \alpha \left(\frac{d d y}{d x^2} \right)$$

$$II^{\circ}. \text{ pro portione } B B \left(\frac{d d y'}{d t^2} \right) = \beta \beta \left(\frac{d d y'}{d x'^2} \right)$$

$$III^{\circ}. \text{ pro portione } C D \left(\frac{d d y''}{d t^2} \right) = \gamma \gamma \left(\frac{d d y''}{d x''^2} \right)$$

facile

facile enim patet pro qualibet portione motum per eadem principia seorsim determinari debere.

3. Integralia completa harum aequationum nulla plane laborant difficultate, quae ita se habere reperiuntur:

$$\text{I. pro prima portione } y = \Phi(t + \frac{x}{\alpha}) - \Psi(t - \frac{x}{\alpha})$$

$$\text{II. pro secunda portione } y' = \Phi'(t + f + \frac{x'}{\beta}) - \Psi'(t - f - \frac{x'}{\beta})$$

$$\text{III. pro tertia portione } y'' = \Phi''(t + g + \frac{x''}{\gamma}) - \Psi''(t - g - \frac{x''}{\gamma})$$

in quibus posterioribus formulis quantitates f et g introduximus, propterea quod abscissae x' et x'' non ab eodem initio A sunt sumtae, praeterea vero characteres Φ , Φ' , Φ'' et Ψ , Ψ' , Ψ'' functiones quas-cunque formularum, quibus sunt praefixi, denotare possunt, quas adeo per lineas curvas quascunque re-praesentare licebit, nequidem eiusmodi lineis exce-ptis, quae libero manus tractu duci possunt. Nunc haec integralia completa ad ipsum statum chordae propositae adcommodari oportet, ac pro prima qui-dem parte, quia chorda in puncto A est fixa, po-sito $x = 0$, etiam fieri debet $y = 0$, unde oritur

$$\Phi : t = \Psi : t$$

sicque functio Ψ congruere debet cum functione Φ . Hinc igitur si ad ipsam iuncturam B progrediamur; applicata hoc loco erit:

$$\Phi(t + \frac{a}{\alpha}) - \Phi(t - \frac{a}{\alpha}).$$

Eadem autem applicata ex formulis secundae por-tionis, sumendo $x' = 0$, prodit

$$= \Phi'(t + f) - \Psi'(t - f),$$

quae

quae expressio ergo illi aequalis esse debet, idque ita ut non solum quantitates functionibus subnexae conveniant, sed etiam ipsae functiones, quippe quod ratio continuitatis postulat, quandoquidem functiones Φ et Ψ seorsim aequationibus differentialibus satisfaciunt. Ob hanc ergo rationem statim colligimus $f = \frac{a}{\alpha}$, tum vero $\Phi' = \Phi$ et $\Psi' = \Phi$, ita ut pro secunda portione B C hanc habeamus aequationem

$$y = \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{x'}{\beta}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{x'}{\beta}\right),$$

vnde pro sequente iunctura C, vbi $x' = b$, applicata prodit

$$= \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta}\right),$$

cui ergo aequalis fieri debet tertia formula generalis, si ibi statuatur $x'' = 0$, quae praebet

$$\Phi''(t + g) - \Psi''(t - g),$$

quocirca ob easdem rationes habebimus $g = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$, ac ratione functionum $\Phi'' = \Phi$ et $\Psi'' = \Phi$, ita ut pro tertia portione C D ista valeat aequatio

$$y'' = \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{x''}{\gamma}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} - \frac{x''}{\gamma}\right).$$

Quum denique sumto hic $x'' = c$, in termino D applicata iterum evanescere debeat, necesse est ut fiat

$$\Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right) = \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} - \frac{c}{\gamma}\right)$$

vnde iam natura functionis Φ ita restringitur, ut

$$\Phi\left(p + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right) = \Phi : p,$$

scilicet si hae functiones denotent applicatas curvae
 Tom. XVII. Nou. Comm. H h h cuius-

cuiuscunque, haec curua ita debet esse comparata, vt abscissis interuallo

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}$$

distantibus eadem vbique applicatae respondeant.

4. Aequationes igitur ad nostrum casum accommodatae pro singulis portionibus chordae ita se habebunt:

$$y = \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha}\right) \text{ pro portione AB}$$

$$y' = \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta}\right) \text{ pro portione BC}$$

$$y'' = \Phi\left(t + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right) - \Phi\left(t - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} - \frac{c}{\gamma}\right) \text{ pro portione CD}$$

vbi quidem functio Φ eam indolem habere debet, quam modo ante descripsimus, vnde statim colligitur elapso tempore

$$t = \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}$$

omnes applicatas ideoque totius chordae figuram iterum ad eum statum esse peruenturam, quem initio, vbi $t = 0$, obtinuerat, quare quum chorda interea duas vibrationes absoluisse censeatur, tempus vnius cuiusque vibrationis erit

$$= \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}$$

idque in minutis secundis expressum, quae expressio sine dubio simplicior esse non posset.

5. Ex formulis inuentis porro facilis et satis elegans constructio concinnari poterit, similis illi, quam pro casu chordarum vniformium tradidimus, quae scilicet ope cuiusdam scalae constructionis perficieba-

ficiebatur. Quoniam autem formulae t et $\frac{x}{\alpha}, \frac{x'}{\beta}, \frac{x''}{\gamma}$, meros tantum numeros indicant, multiplicentur eae per certam quandam lineam arbitrariam, quae $=i$, in quam igitur omnes superiores formulae, characteri functionis Φ subnexae, ductae sunt intelligendae. Atque nunc pro qualibet abscissa in ipsa chorda et ab eius initio A sumta, in scala constructionis capi debet peculiaris quaedam abscissa, quam abscissam fictam adpellare liceat, et quam littera v designemus, cuius relatio ad abscissas chordae sequenti modo se habebit:

Pro abscissa ipsius chordae	Abscissa ficta
I°. $AX = x$	$v = \frac{ix}{\alpha}$
II°. $AX' = a + x'$	$v = \frac{ia}{\alpha} + \frac{ix'}{\beta}$
III°. $AX'' = a + b + x''$	$v = \frac{ia}{\alpha} + \frac{ib}{\beta} + \frac{ix''}{\gamma}$

sicque pro tota longitudine chordae

$$AD = a + b + c,$$

abscissa ficta euadet

$$v = i \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} \right),$$

atque hinc perspicuum est, quomodo cuius abscissae in ipsa chorda a termino A desumptae, eidem respondens abscissa ficta definiri queat, quin etiam vicissim quomodo ex quavis abscissa ficta, ei respondens abscissa vera chordae reperiatur.

6. Ad constructionem generalem huius Problema-
tis adornandam in axe indefinito capiatur intervallum

$$ai = 2i \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} \right)$$

H h h 2

super

Tab. VI.
Fig. 3.

super quo describatur linea curua quaecunque $\alpha \eta$, ita vt applicatae extremae $\alpha \alpha$ et $i \eta$ sint inter se aequales, tum eadem haec curua tam dextrorsum quam sinistrorsum super eodem axe replicetur, quoties lubuerit. Sufficiet autem vtrinque semel eam repetiuisse, quoniam tempus t non opus est vltra valorem

$$2 \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} \right)$$

augere, tum si ad tempus quodcunque t velimus chordae figuram assignare; a puncto fixo a capiamus interuallum $at = it$, cui respondeat applicata $t\theta$, quo facto, vt in ipsa chordae figura inueniamus applicatam, quae respondeat cuicunque abscissae x , a termino A sumtae (vbi iam perinde est in quamnam portionem chordae alter eius terminus cadat), quaeratur primo abscissa ficta v illi respondens et a puncto t vtrinque abscindantur interualla aequalia $tu = tu' = v$, vt in scala constructionis habeantur binae applicatae us et $u's'$, tum applicata figurae cordae quaesita erit $y = us - u's'$, quae operatio si pro quauis abscissa x instituatur, hoc modo delineabitur tota cordae figura, pro isto tempore t .

7. Quod si fuerit $t = 0$ et punctum t in ipso puncto a capiatur, hoc modo resultabit figura, quam chorda ipso initio habuerit, tum vero etiam ipse motus, qui singulis chordae elementis inerat, facile innotescet, quum enim in genere habeamus,

$$y = \Phi(it + v) - \Phi(it - v)$$

erit

erit celeritas puncti chordae respondentis

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = i\Phi : (it + v) - i\Phi' : (it - v),$$

ideoque pro statu initiali

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = i\Phi : (v) - i\Phi' : (-v)$$

atque hinc vicissim, si status chordae initialis fuerit cognitus, tam ratione figurae, quam ratione motus, inueniri poterit scala constructionis conueniens, id quod aliquanto clarius exposuisse iuuabit.

8. Scilicet si in statu initiali, vbi $t = 0$, abscissae x a termino fixo A sumtae, cui respondeat abscissa ficta $= v$, adplicata sit $= \Gamma : v$, quoniam spectari potest, vt certa functio ipsius v , celeritas autem in eodem loco sit $= i\Delta' : v$, vbi $\Delta' : v$ in $d v$ ductum exprimit differentiale $\Delta : v$, comparentur hi valores cum scala relationis, atque habebimus has aequationes:

$$\Phi : v - \Phi(-v) = \Gamma : v \text{ et } \Delta' : v = \Phi'(v) - \Phi'(-v)$$

quae posterior aequatio in $d v$ ducta et integrata dat

$$\Phi(v) + \Phi(-v) = \Delta : v + F$$

ex qua aequatione cum priore deducitur

$$\Phi : v = \frac{\Delta : v + \Gamma : v}{2} + \frac{1}{2}F \text{ et } \Phi(-v) = \frac{\Delta : v - \Gamma : v}{2} + \frac{1}{2}F$$

ex quibus formulis scala relationis tam dextrorsum, quam finistrorsum a termino $v = 0$, vsque ad terminum

$$v = i\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}\right)$$

facile construetur et super axe intervallum duplo maius

$$= 2i \left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} \right)$$

complebitur, quam figuram deinceps tam dextrorsum quam sinistrorsum replicari oportet, caeterum notari conuenit, si scala celeritatum initialium super abscissis fictis v exstructa detur, ita vt eius applicata sit $i \Delta' : v$, tum aream huius scalae fore

$$= i \Delta : v, \text{ ideoque } \Delta : v = \frac{\text{Areae}}{i},$$

sicque valor huius functionis $\Delta : v$ facillime innotescit. Euidens est hanc constructionem prorsus conuenire cum illa, quae circa chordas vniformis crassitiei est tradita.

9. Caeterum diffiteri non possumus, quoniam in qualibet iunctura B, C lex continuitatis quodammodo interrumpitur, etiam aberrationem quampiam calculi a veritate admitti debere, quae autem quum tantum circa elementa chordae quam minima locum habeat, pro nihilo haberi poterit, quam ob causam hae formulae adhiberi non poterunt, quando chorda prorsus habuerit crassitiem per totam longitudinem variabilem, quia tum aberratio in omnibus punctis vsu veniret, atque idcirco valorem finitum acquireret. Huiusmodi autem aberratio tantum in figura chordae cerneretur, dum tempus cuiusque vibrationis idem esset proditum, vti regula hic inventa postulat, quoniam ex aliis phaenomenis iam sumus certi, tempora vibrationum non a figura chordarum pendere.

10. Quare si chorda crassitie vtcunque variabili fuerit praedita, pro abscissa quacunque $= x$, crassities ita se habeat, vt si corda longitudinis $= k$ fuerit aequae crassa, eius pondus futurum sit $= V$, quoniam ergo huius elementi longitudo est $= dx$, si ponamus

$$2bk \cdot \frac{K}{V} = uu,$$

pro formulis illis

$$= \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma} \text{ etc.}$$

hic indefinite habebimus $\frac{dx}{u}$, huius ergo formulae integrale, per totam cordae longitudinem sumtum, dabit tempus singularum vibrationum, ita vt hoc tempus sit

$$\int \frac{dx \sqrt{V}}{\sqrt{2bkK}},$$

dum scilicet hoc integrale $\int dx \sqrt{V}$ per totam chordae longitudinem extenditur, quum igitur praecipua quaestio super chordis vibrantibus in hoc versetur, vt tempora vibrationum definiamus, ipsas autem figuras, quas chorda inter vibrandum induit, parum morari soleamus, quaestio de motu vibratorio chordarum, ex quocunque partibus diuersae crassitiei eae fuerint compositae, siue adeo crassitiem habeant vtcunque variabilem, nunc quidem pro perfecte soluta erit habenda.